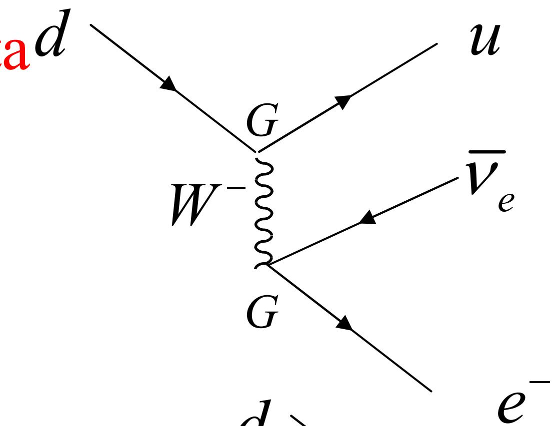
Interazioni deboli

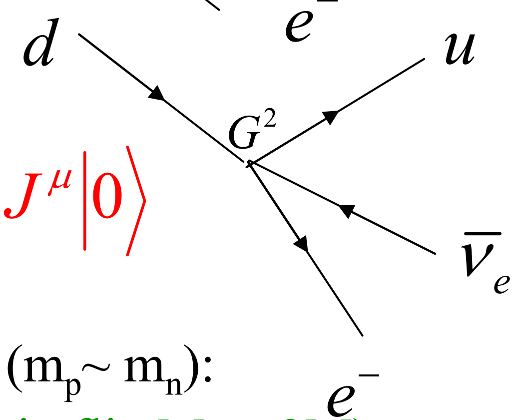
La prima misurata :il decadimento beta



$$n \to p + e^- + \bar{\nu}_e$$
$$d \to u + e^- + \bar{\nu}_e$$
$$^3H \to {}^3He + e^- + \bar{\nu},\ {}^6He \to {}^6Li + e^- + \bar{\nu}$$

Se l'impulso trasferito è piccolo
è un'interazione di contatto tra
le correnti (Fermi):

$$M = \frac{G}{\sqrt{2}} \langle u | J_\mu | d \rangle \langle e \bar{\nu} | J^\mu | 0 \rangle$$



Trascurando la dipendenza di M dagli impulsi ($m_p \sim m_n$):

M=G=1.166 10^{-5} GeV^{-2} (per Gamow-Teller $\Delta J=1$,spin flip $M \longrightarrow 3M$)

La probabilità di transizione W(regola d'oro) dipende solo dallo spazio delle fasi:

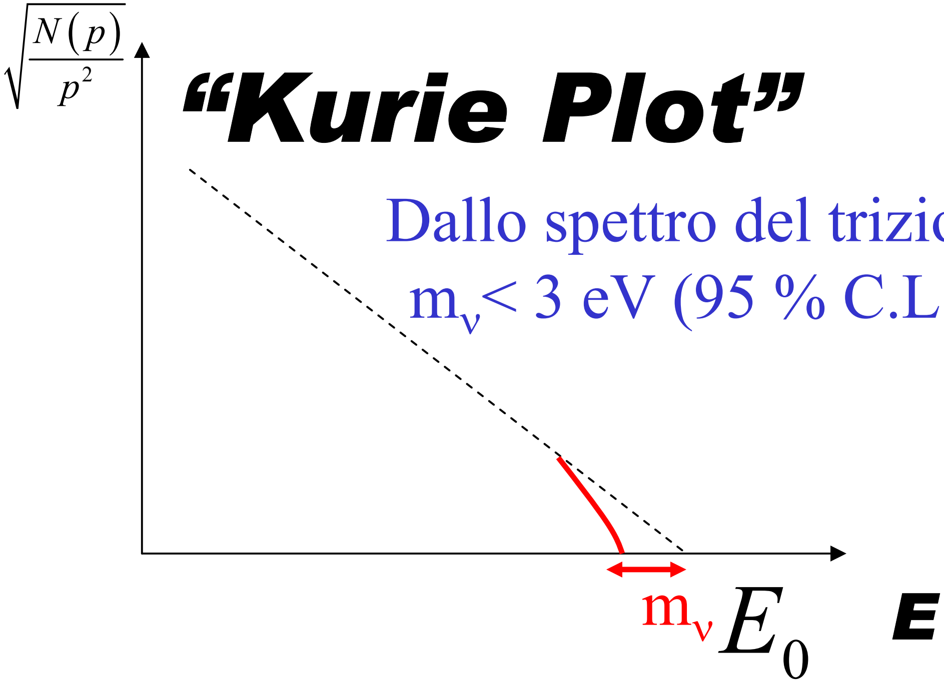
$$W = 2\pi |M|^2 \frac{dN}{dE_0} \quad (E_0 = E_p + E_{\bar{\nu}} + E_e)$$

(l'energia è trasportata solo da e e ν:spazio delle fasi 2 corpi)

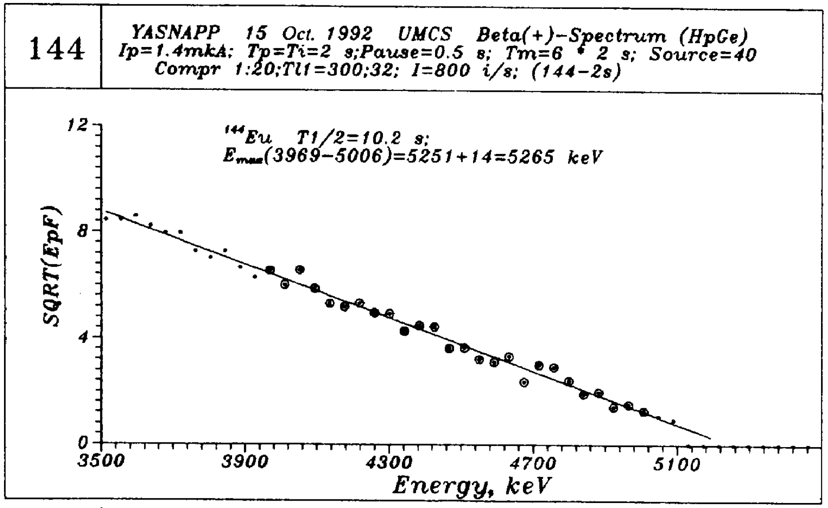
$$\frac{dN}{dE_0} = 16\pi^2 p^2 (E - E_0)^2 dp;\ \mathrm{N_e}(p)dp = p^2 (E - E_0)^2 dp;$$

$$\mathrm{N_e}(p)dp = p^2 (E - E_0)^2 \sqrt{1 - \left(\frac{m_\nu}{E_0 - E}\right)^2} dp \quad (se\ m_\nu \neq 0)$$

Spettro di energia dell'elettrone



Dallo spettro del trizio:
$m_\nu < 3$ eV (95 % C.L.



La probabilità totale di transizione:

$$W = \frac{G^2}{2\pi^3}\int_0^{p_{\max}} N(p)dp \propto G^2$$

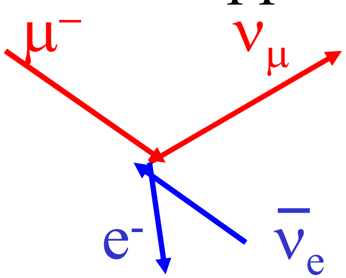
Se l'elettrone è relativistico: $N(E)dE = E^2(E_0 - E)^2 dE \Rightarrow N = \int_0^{E_0} N(E)dE = \frac{E_0^5}{30}$

$$\Rightarrow W \propto G^2 E_0^5,\ E_0 = energia\ \max\ dell'elettrone = \ m_n - m_p$$

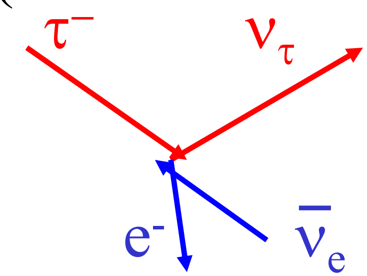
G si estrae dalle probabilità di transizioni (vite medie) in funzione di E_0:
Le vite medie dei decadimenti beta variano da secondi a anni (E_0^5)

Le correnti deboli cariche

Esistono (oltre quella elettronica) altri 2 tipi di correnti deboli cariche con accoppiamento universale G (ma differenze nello spazio delle fasi):



: $\mu^- \to e^- \, \nu_\mu \, \bar{\nu}_e$



: $\tau^- \to e^- \, \nu_\tau \, \bar{\nu}_e$

Questo porta all'introduzione di tre doppietti leptonici $\begin{bmatrix} e^- \\ \nu_e \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mu^- \\ \nu_\mu \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tau^- \\ \nu_\tau \end{bmatrix}$ + antipartielle

Evidenza sperimentale: solo gli stati con elicità negativa partecipano alle interazioni deboli. $\left(\lambda = \frac{\vec{s}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|} = \pm\frac{1}{2} \text{ se } \ s = 1/2\right)$

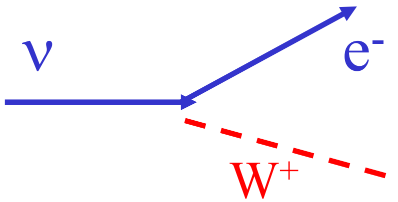
Si incorpora nella teoria con il fattore $(1-\gamma_5)$ nella corrente (V-A). **$(1-\gamma_5)$ è un proiettore di elicità negativa**. In QED invece ho entranbi gli stati di elicità

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \gamma^\mu \equiv vettore; \gamma^\mu\gamma^5 \equiv vettore \ \ assiale$$

$$\frac{1}{2}(1-\gamma^5) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \textit{seleziona le due componenti in basso dello spinore:} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}$$

N.B. L'elicità λ è un buon numero quantico (Lorentz) solo per particelle di massa nulla (neutrini?)

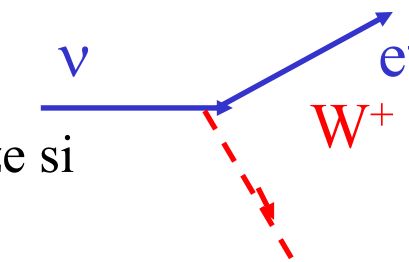
La corrente leptonica debole :



$$J^\mu = \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{u}(e)\gamma^\mu \frac{1}{2}(1-\gamma^5) u(\nu_e)$$

Differenza da QED

L'interazione puntuale alla Fermi crea problemi di unitarietà e, d'altra parte sappiamo che le interazioni deboli hanno range limitato $\Longrightarrow$ $\Longrightarrow$ Propagatore bosonico massivo.



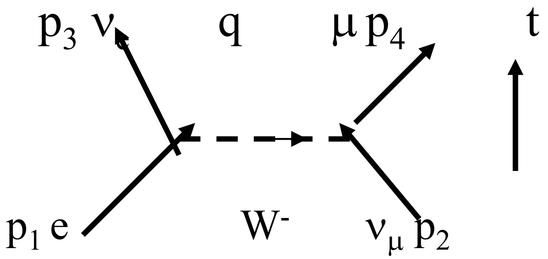
Le regole di Feynman per la costruzione delle ampiezze si Modificano rispetto a QED:

$$1)\ \text{Propagatore}: -i\frac{\left(g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu / M^2\right)}{q^2 - M^2} \xrightarrow{q^2 << M^2} i\frac{g_{\mu\nu}}{M^2} \quad \left(\textit{in QED era } -i\frac{g_{\mu\nu}}{q^2}\right)$$

$$2)\ \textit{fattore}\ \text{di vertice}: \frac{g_W}{2\sqrt{2}}\gamma^\mu(1-\gamma^5),\ g_W = \sqrt{4\pi\alpha_W} \quad \left(\textit{in QED era } -ie\gamma^\mu\right)$$

Es. Il decadimento inverso del μ :

$$\nu_\mu + e^- \rightarrow \mu^- + \nu_e \ (\text{analogo a } \mu e \rightarrow \mu e \text{ in QED})$$



$q = p_1 - p_3$; se $q^2 << M_W^2$, il propagatore si semplifica : $\dfrac{ig_{\mu\nu}}{M_W^2}$

$$M = i\frac{g_W^2}{8M_W^2}\left\{\overline{u}(3)\gamma^\mu(1-\gamma^5)u(1)\right\}\left\{\overline{u}(4)\gamma^\mu(1-\gamma^5)u(2)\right\}$$

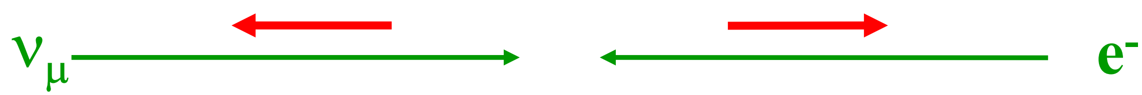
Oppure con la notazione di Fermi (G)

$$M = \frac{G}{\sqrt{2}}\left\{\overline{u}(3)\gamma^\mu\frac{(1-\gamma^5)}{2}u(1)\right\}\left\{\overline{u}(4)\gamma^\mu\frac{(1-\gamma^5)}{2}u(2)\right\} con \quad \frac{G}{\sqrt{2}} = \frac{g_W^2}{8M_W^2}$$

Modulo quadro dell'ampiezza, mediata sugli spin iniziali e sommata su quelli finali e trascurando le masse:

$$|M|^2 = 2\left(\frac{g_W}{M_W}\right)^4 (p_1\cdot p_2)(p_3\cdot p_4) = 2\left(\frac{g_W}{M_W}\right)^4 (p_1\cdot p_2)^2 = \left(\frac{g_W}{M_W}\right)^4 (\frac{s}{2})^2 = 16G^2s^2$$

Non c'e' dipendenza angolare nell'elemento di matrice prche' l'interazione, a causa del proiettore di elicita' avviene in uno stato di momentoi angolare nullo



Cfr. Nel caso di QED μ+e → μ +e:
due differenze: il propagatore non e' costante, entrambe le elicita' partecipano

$$|M|^2 = 8\frac{e^4}{t^2}\left\{s^2 + u^2\right\}$$

Nel c.m. le particelle hanno tutte energia E (trascurando le masse) quindi $s=(2E)^2$ La regola d'oro per le interazioni $1+2\rightarrow 3+4$:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\left(\frac{1}{8\pi}\right)^2\frac{|M|^2}{(E_1+E_2)^2}\frac{|\vec{p}_f|}{|\vec{p}_i|}=\frac{1}{2}\left[\frac{g_W^2 E}{4\pi M_W^2}\right]^2, \textit{indipendente dall'angolo di scattering}$$

La sezione d'urto differenziale si può scrivere anche in funzione di $\mathbf{t=2E^2(\cos\theta-1)}$:

$$dt=2E^2 d\cos\theta \Rightarrow \frac{d\sigma}{dt}=\frac{1}{2E^2}2\pi\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{1}{32\pi}\frac{g_W^4}{M_W^4}=\frac{G^2}{\pi}$$

Si può integrare su t: $-4E^2=-s<t<0$: $\sigma=\int_{-s}^{0}\frac{G^2}{\pi}dt=\frac{G^2}{\pi}s$

-La sezione d'urto differenziale è isotropa;

-la sezione d'urto totale cresce come s .

L'ampiezza di $\nu_\mu+e^-\rightarrow\mu^-+\nu_e$ per simmetria di crossing mi fornisce anche quella del decadimento: $\mu^-\rightarrow\nu_\mu+e^-+\overline{\nu}_e$ (Es.) da cui:

$$\boxed{\frac{1}{\Gamma_\mu}\equiv\tau_\mu=\frac{192\pi^3}{G^2 m_\mu^5}}$$

Dalla misura di τ_μ (e dalla conoscenza di m_μ) si estrae il valore di di G

La dipendenza da m^{-5} è tipica di ogni decadimento debole (trascurando le masse finali).

Risultato sperimentale: τ_μ=2.197 10^{-6} s, m_μ=0.105658 GeV $\Longrightarrow$

$G = 1.166\ 10^{-5}\ \mathrm{GeV}^{-2}$

$$con\ \ \frac{G}{\sqrt{2}} = \frac{g_W^2}{8M_W^2},\ \mathrm{M_W} \approx 80\,\mathrm{GeV} \Rightarrow \mathrm{g_W} = 0.66, \alpha_W = \frac{g_W^2}{4\pi} = \frac{1}{129}$$

Le interazioni deboli sono tali non tanto perchè la costante di accoppiamento sia debole, quanto perchè il mediatore (W) è molto pesante e il temine di massa nel propagatore (a bassi Q^2) domina.

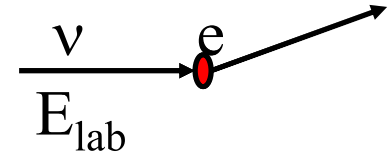
Se $Q^2 \sim M_W{}^2$ $(80\ \mathrm{GeV})^2$ le interazioni deboli diventano paragonabili a quelle elettromagnetiche:

UNIFICAZIONE?

Torniamo a $\nu_\mu + e^- \rightarrow \mu^- + \nu_e$:

$$\sigma = \frac{G^2}{\pi} s \xrightarrow{c.m.} \frac{4}{\pi} GE^2 = 1.48 \cdot 10^{-10} GeV^{-2} \cdot E^2 (E \text{ in GeV}) \approx 0.576 \cdot 10^{-37} cm^2 \cdot E^2$$

Normalmente la reazione avviene nel laboratorio:



$$s = (2E)^2 = (E_{lab} + m_e)^2 - E_{lab}^2 \cong 2m_e E_{lab} \Rightarrow E_{lab} \cong \frac{2E^2}{m_e} (E = 1GeV \Rightarrow E_{lab} \approx 4000 \text{ GeV})$$

$$\sigma_{lab} = \frac{4}{\pi} G^2 \frac{m_e E_{lab}}{2} \ \textit{cresce linermente con } E_{lab} : \frac{\sigma_{lab}}{E_{lab}} = 1.5 \cdot 10^{-42} cm^2 GeV^{-1}$$

Più probabile l'interazione tra neutrino e nucleone di massa M (puntiforme?)

$$\sigma_{lab} = \frac{4}{\pi} G^2 \frac{ME_{lab}}{2} \Rightarrow \frac{\sigma_{lab}}{E_{lab}} = 0.3 \cdot 10^{-38} cm^2 GeV^{-1}$$

L'interazione con i nucleoni è più probabile perchè a parità di energia incidente dei neutrini s=2ME$_{lab}$ a causa del fatto M~2000 m$_e$ è 2000 volte più grande.

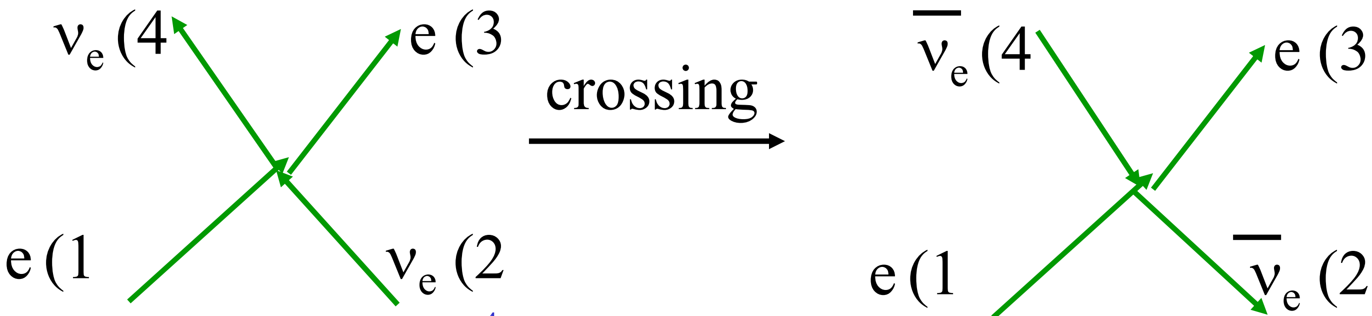
Neutrini e antineutrini

Consideriamo l'ampiezza del processo: $\nu_\mu + e^- \to \mu^- + \nu_e$

$$|M|_\nu^2 = 2\left(\frac{g_W}{M_W}\right)^4 (p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) == 16G^2 (p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4)$$

Tale ampiezza vale anche per l'interazione $\nu_e + e^- \to e^- + \nu_e$

Consideriamo ora $\bar{\nu}_e + e^- \to e^- + \bar{\nu}_e$ (o anche $\bar{\nu}_e + e^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu$) crossing



Equivale a scrivere $|M|^2$ con:

$p_2 \to -p_4$; $p_4 \to -p_2$

o $p_1 \to -p_3$; $p_3 \to -p_1$

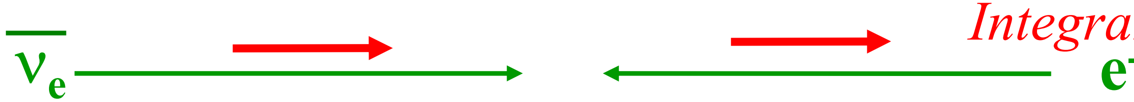
$$quindi\ |M|_{\bar{\nu}}^2 = 2\left(\frac{g_W}{M_W}\right)^4 (p_1 \cdot p_4)(p_3 \cdot p_2);\ \text{ma u} = (\text{p}_1 - p_4)^2 = (p_2 - p_3)^2 = -2p_1 p_4 = -2p_2 p_3$$

$$quindi: |M|_{\bar{\nu}}^2 = 16G^2 u^2 \Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega}(\bar{\nu}) = \frac{1}{(8\pi)^2}\frac{1}{s}|M|_{\bar{\nu}}^2 = \frac{G^2}{4\pi^2}\frac{u^2}{s} \xrightarrow{c.m.} \frac{G^2}{4\pi^2}\frac{s}{2}(1+\cos\theta)^2$$

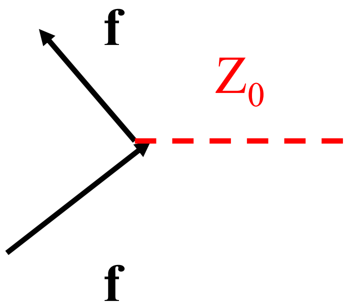
La distribuzione angolare per interazioni di antineutrini:

NON è isotropa (nel c.m.); **si annulla per θ=π e viola la parità**.

$$Integrando\ in\ \cos\theta: \sigma^{\bar{\nu}} = \frac{G^2}{3\pi}s = \frac{1}{3}\sigma^\nu$$



Correnti deboli neutre leptoniche



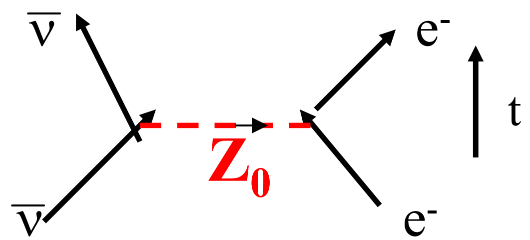
Mediatore un bosone massivo neutro: Z_0

Il fermione iniziale è eguale a quello finale:

$\mu^- \not\to e^- Z_0$

1973: eventi:

$\bar{\nu}_\mu e \to \bar{\nu}_\mu e$ evento con un elettrone singolo



Fatti: le sezioni d'urto per processi deboli neutri sono circa 1/3 di quelli equivalenti di corrente carica e esiste anche un'ulteriore complicazione la corrente non è pura (V-A) ($\gamma_\mu(1-\gamma_5)$):

$$J^\mu = \frac{g_Z}{\sqrt{2}}\bar{u}(f)\gamma^\mu \frac{1}{2}(C_V^f - C_A^f\gamma^5)u(f)$$

Con i coefficienti C_V e C_A che dipendono dal tipo f di fermione in gioco

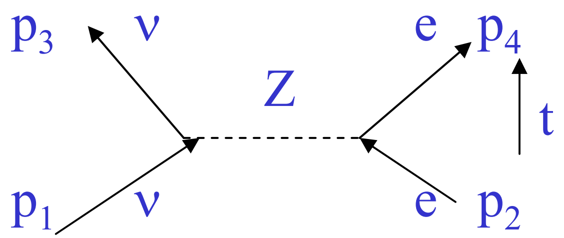
Occorre un modello elettrodebole unificato (GWS): si introduce un nuovo paraametro: θ_W che lega g_W,g_Z e e: $g_e = e; g_W = \frac{g_e}{\sin\theta_W}; g_Z = \frac{g_e}{\sin\theta_W \cos\theta_W}$

I leptoni e i quark sono organizzati in doppietti di isospin debole (T,T_3):

$$\begin{matrix} T_3 = 1/2 \\ T_3 = -1/2 \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} \nu_e \\ e \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} u \\ d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c \\ s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t \\ b \end{bmatrix}$$

$$C_V^i = T_3 - 2q_i \sin^2\theta_W; ex: C_V^\nu = \frac{1}{2},\ C_V^{e^-} = -\frac{1}{2} + 2\sin^2\theta_W;\ C_V^u = -\frac{1}{2} - \frac{4}{3}\sin^2\theta_W,\ \ C_V^d = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\sin^2\theta_W$$

Scattering elastico $\nu_\mu e^- \to \nu_\mu e^-$



$$M = i\frac{g_z^2}{8M_z^2}\left\{\overline{u}(3)\gamma^\mu(C_V - C_A\gamma^5)u(1)\right\}\left\{\overline{u}(4)\gamma^\mu(C_V - C_A\gamma^5)u(2)\right\}$$

$$|M|^2 = \left[\frac{g_Z^2}{M_Z^2}\right]^2 \left\{ \begin{array}{l} (C_V^2 + C_A^2)\frac{1}{2}\cdot\left[(p_1\cdot p_2)(p_3\cdot p_4) + (p_1\cdot p_4)(p_2\cdot p_3)\right] + \\ + C_V C_A\left[(p_1\cdot p_2)(p_3\cdot p_4) - (p_1\cdot p_4)(p_2\cdot p_3)\right] \end{array} \right\}$$

Propagatore semplificato

$$|M|^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{g_Z^2}{M_Z^2}\right]^2 \left\{(C_V + C_A)^2\cdot(p_1\cdot p_2)(p_3\cdot p_4) + (C_V - C_A)^2(p_1\cdot p_4)(p_2\cdot p_3)\right\}$$

Andiamo nel c.m. $\quad p_1 = [E, \vec{p}_1],\ p_2 = [E, -\vec{p}_1],\ p_3 = [E, \vec{p}_3],\ p_4 = [E, -\vec{p}_3]$

$$(p_1\cdot p_2)(p_3\cdot p_4) = 2E^2 2E^2 \qquad (p_1\cdot p_4)(p_3\cdot p_2) = E^4(1+\cos\theta)^2 = 4E^4\cos^4\frac{\theta}{2}$$

θ angolo tra i due ν

$$|M|^2 = 2\left[\frac{g_Z^2 E^2}{M_Z^2}\right]^2 \left\{(C_V + C_A)^2 + (C_V - C_A)^2\cos^4\frac{\theta}{2}\right\}$$

$$E_1 = E_2 = E = |\vec{p}_f| = |\vec{p}_i|$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{1}{8\pi}\right)^2 \frac{|M|^2}{(E_1 + E_2)^2}\frac{|\vec{p}_f|}{|\vec{p}_i|} = \frac{2g_Z^4 E^2}{\pi^2[4M_Z]^4}\left[(C_V + C_A)^2 + (C_V - C_A)^2\cos^4\frac{\theta}{2}\right]$$

Nel caso di $\nu_\mu e^- \to \mu^- \nu_e$ corrente carica era indipendente da θ (C_V=C_A)

Il primo evento di corrente neutra osservato

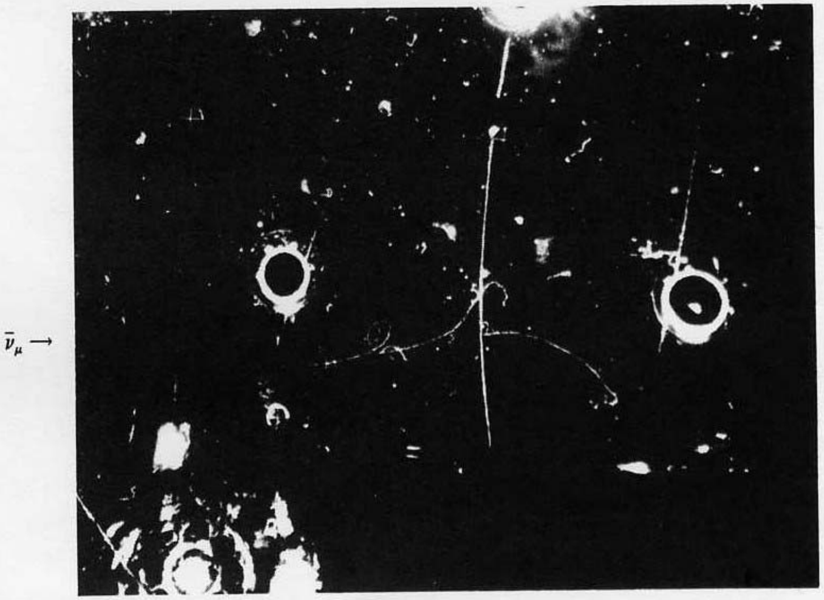
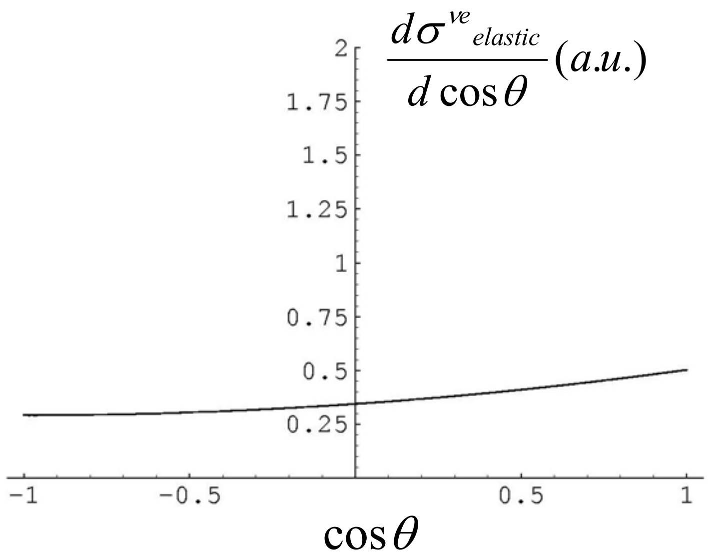
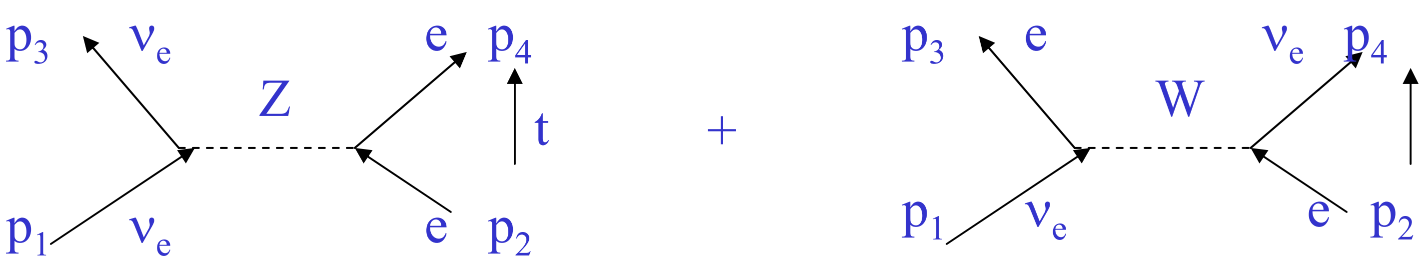


Figure 10.6 The first picture of a neutral weak process ($\bar{\nu}_\mu + e^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu + e^-$). The neutrino enters from the left (leaving no track), and strikes an electron, which moves off horizontally to the right, emitting two photons (which show up in the picture only when they subsequently produce electron-positron pairs) as it slows down and spirals inward in the superimposed magnetic field. (Photo courtesy CERN.)



Da notare che nel caso di scattering $\nu_e e \rightarrow \nu_e e$ contribuicono sia l'interazione di corrente neutra che quella di corrente carica, a differenza di $\nu_\mu e \rightarrow \nu_\mu e$.



$$\sigma_{el}^{\nu e} = \frac{2}{3\pi}\left(\frac{g_Z}{2M_Z}\right)^4 E^2 (C_V^2 + C_A^2 + C_V C_A)$$

$$se: C_V^e = -\frac{1}{2} + 2\sin^2\theta_W, C_A^e = -\frac{1}{2}$$

$$\sigma_{el}^{\nu e} = \frac{2}{3\pi}\left(\frac{g_Z}{2M_Z}\right)^4 E^2 (3/4 - 2\sin^2\theta_W + 4\sin^4\theta_W)$$

Da paragonare a

$$\sigma(\nu_\mu e \to \mu^- \nu_e) = \frac{1}{8\pi}\left(\frac{g_W}{M_W}\right)^4 E^2$$

$$con \quad g_Z = \frac{g_W}{\cos\theta_W}; M_Z = \frac{M_W}{\cos\theta_W}$$

$$\boxed{\frac{\sigma(\nu_\mu e \to \nu_\mu e)}{\sigma(\nu_\mu e \to \mu^- \nu_e)} = \frac{1}{4} - \sin^2\theta_W + \frac{4}{3}\sin^4\theta_W}$$

<u>Sensibile all'angolo di Weinberg!,</u> **se $\sin^2\theta_W = 0.23$**

$$\boxed{\frac{\sigma(\nu e \to \nu e)}{\sigma(\nu e \to \mu \nu_e)} \equiv \frac{\sigma^{NC}}{\sigma^{CC}} = 0.09}$$

In accordo con i dati sperimentali

Bibliografia

- **D.Perkins**, “Introduction to high energy physics”, quarta edizione Cambridge University Press, 1999;
- **D.Griffith**,”Introduction to elementary particles” Harper & Row, Publisher, New York, 1987;
- **I.J.Aitchison, A.J.G.Hey**, “Gauge theories in particle physics”, Institute of physics 2003.
- **L.B.Okun**, “Leptons and quarks” North Holland pub.